

Interpolation mit periodischen Spline-Funktionen II

GERHARD MERZ

Gesamthochschule Kassel, D-3500 Kassel, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received December 30, 1978

1.

Bezeichnet C_N den linearen Raum der auf der reellen Achse stetigen Funktionen mit der Periode $N \in \mathbb{N}$ und $S_{N,\lambda}^m$ für festes λ mit $0 \leq \lambda < 1$ den linearen Raum der N -periodischen Spline-Funktionen vom Grad $m \geq 1$, deren Knoten in den ganzen Zahlen liegen und die gleichzeitig an den Stellen $\nu - \lambda$, $\nu \in \mathbb{Z}$, Interpolationsbedingungen der Form

$$s(\nu - \lambda) = f(\nu - \lambda) =: y_\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

genügen, so läßt sich die Lösung des hierdurch gestellten Interpolationsproblems vektoriell in der Form

$$q(t) = W^* Q(t) Q^{-1} (1 - \lambda) W y, \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

darstellen (vgl. [4]). Hierbei ist $W = (1/\sqrt{N})((\zeta^{\mu\nu}))_{\mu,\nu=0}^{N-1}$ mit $\zeta = \exp(2\pi i/N)$ die Matrix der diskreten Fourier-Transformation und

$$Q(t) := \text{diag } H_m(t, \zeta^\mu), \quad \mu = 0(1)N - 1,$$

wird mit den durch

$$H_m(t, z) := (1 - z)^{m+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu (t + \nu)^m, \quad m \geq 0,$$

definierten verallgemeinerten Euler-Frobenius-Polynomen gebildet. Ferner wurde $y := (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ gesetzt. Notwendig und hinreichend für die eindeutige Lösbarkeit der gestellten Aufgabe ist offenbar, daß die Bedingungen $H_m(1 - \lambda, \zeta^\mu) \neq 0$, $\mu = 0(1)N - 1$, erfüllt sind. Dies ist (vgl. ter Morsche [5]) beispielsweise gegeben, wenn N ungerade ist, weshalb wir uns im folgenden auf diesen Fall beschränken werden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, Aussagen über die Tschebyscheff-Norm des vermöge (1) durch

$$\mathcal{L}_{N,\lambda}^m(f): C_N \rightarrow S_{N,\lambda}^m$$

definierten linearen Operators zu gewinnen. Diese Aufgabe ist bisher nur für $\lambda = 0$ und m ungerade bzw. für $\lambda = \frac{1}{2}$ und m gerade behandelt worden und zwar für kubische Splines von Cheney und Schurer [1], für Splines vom Grad fünf von Schurer [7] und für beliebiges m von Richards [6] sowie von Meinardus und Merz [2]. Obwohl die meisten unserer Überlegungen für beliebiges m zum Ziel führen, beschränken wir uns hier auf die Untersuchung quadratischer Splines ($m = 2$), da die durch die Abhängigkeit von λ verursachten Phänomene im Verhalten von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^m\|_\infty$ bereits an diesem Fall in exemplarischer Weise aufgezeigt werden können.

Herrn Prof. Dr. W. Sippel danke ich wiederum für seine Hilfe bei der Durchführung zahlreicher numerischer Rechnungen.

2.

Bezeichnet $L_{N,\lambda}^2(x)$ diejenige quadratische Spline-Funktion, die durch die Interpolationsbedingungen

$$\begin{aligned} L_{N,\lambda}^2(\nu) &= 1 && \text{für } \nu = 0(N), \\ L_{N,\lambda}^2(\nu) &= 0 && \text{für } \nu \neq 0(N), \end{aligned}$$

festgelegt ist, so gilt für $-\infty < x < \infty$

$$\mathcal{L}_{N,\lambda}^2(f)(x) = \sum_{\nu=1}^N f(\nu - \lambda) L_{N,\lambda}^2(x - \nu - \lambda)$$

und folglich wird

$$|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \sum_{\nu=1}^N |L_{N,\lambda}^2(x - \nu - \lambda)|. \tag{3}$$

Da $L_{N,\lambda}^2(x)$ nach Transformation auf das Intervall $0 \leq t \leq 1$ wegen (2) die vektorielle Darstellung

$$(s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t))^T := W^*Q(t)Q^{-1}(1 - \lambda)W(0, 0, \dots, 0, 1)^T \tag{4}$$

besitzt, folgt somit aus (3)

$$\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} \sum_{\nu=1}^N |s_\nu(t)|. \tag{5}$$

Überträgt man die von Richards [6] für $\lambda = 0$ durchgeführten Überlegungen auf den vorliegenden Fall, so zeigt sich, daß gilt

$$\begin{aligned}\tilde{S}(t) &:= \sum_{\nu=1}^N |s_{\nu}(t)| = \sum_{\nu=1}^N (-1)^{\nu+1} s_{\nu}(t) && \text{für } 0 \leq t \leq 1 - \lambda, \\ \tilde{S}(t) &= \sum_{\nu=0}^{N-1} (-1)^{\nu} s_{\nu}(t) && \text{für } 1 - \lambda \leq t \leq 1\end{aligned}$$

(man beachte, daß modulo N $s_0(t) = s_N(t)$ ist).

Unter Verwendung von (4) ergibt sich somit

$$\tilde{S}(t) = \frac{2}{N} \begin{cases} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{H_2(t, \zeta^{\mu})}{(1 + \zeta^{\mu}) H_2(1 - \lambda, \zeta^{\mu})} & \text{für } 0 \leq t \leq 1 - \lambda, \quad (6) \\ \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{\zeta^{\mu} H_2(t, \zeta^{\mu})}{(1 + \zeta^{\mu}) H_2(1 - \lambda, \zeta^{\mu})} & \text{für } 1 - \lambda \leq t \leq 1. \quad (7) \end{cases}$$

Da $\tilde{S}(t)$ mit Ausnahme des Punktes $t = 1 - \lambda$ für $0 \leq t \leq 1$ analytisch ist, berechnet sich der durch

$$\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_{\infty} = \max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{S}(t) = \tilde{S}(t_{N,\lambda}) \quad (8)$$

definierte Wert $t_{N,\lambda}$ aus der linearen Gleichung

$$\tilde{S}'(t) = 0. \quad (9)$$

Richards [6] hat gezeigt, daß $t_{N,0} = 0.5$ und $t_{N,0.5} = 0$ ist. Für alle andern Werte von λ hängt $t_{N,\lambda}$ auch von N ab.

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t} H_2(t, z) = 2(1 - z) H_1(t, z) = 2(1 - z)[(1 - z)t + z]$$

folgt für $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ aus (6) und (9)

$$t_{N,\lambda} \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{(1 - \zeta^{\mu})^2}{(1 + \zeta^{\mu}) H_2(1 - \lambda, \zeta^{\mu})} + \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{(1 - \zeta^{\mu}) \zeta^{\mu}}{(1 + \zeta^{\mu}) H_2(1 - \lambda, \zeta^{\mu})} = 0 \quad (10)$$

und für $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$ aus (7) und (9)

$$t_{N,\lambda} \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{(1 - \zeta^{\mu})^2 \zeta^{\mu}}{(1 + \zeta^{\mu}) H_2(1 - \lambda, \zeta^{\mu})} + \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{(1 - \zeta^{\mu}) \zeta^{2\mu}}{(1 + \zeta^{\mu}) H_2(1 - \lambda, \zeta^{\mu})} = 0. \quad (11)$$

Bemerkungen. (i) Für $\lambda = 0$ bzw. $\lambda = \frac{1}{2}$ bestätigt man mit Hilfe von (10) das zitierte (und natürlich einfacher herleitbare) Ergebnis von Richards [6].

(ii) Sind λ_1 und λ_2 zwei voneinander verschiedene λ -Werte mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, so gilt aus Symmetriegründen

$$t_{N,\lambda_1} + t_{N,\lambda_2} = 1. \tag{12}$$

Nun sei $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$. Wir formen die in (10) auftretenden Summen mit Hilfe komplexer Integration um. Dazu sei zunächst

$$S_{N,\lambda}^{(1)} := \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{(1 - \zeta^\mu)^2}{(1 + \zeta^\mu) H_2(1 - \lambda, \zeta^\mu)}, \tag{13}$$

$$S_{N,\lambda}^{(2)} := \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{(1 - \zeta^\mu) \zeta^\mu}{(1 + \zeta^\mu) H_2(1 - \lambda, \zeta^\mu)}$$

und

$$I_{N,\lambda}^{(1)} := \frac{N}{2\pi i} \oint_{C_1 - C_2} \frac{(1 - z)^2 z^{N-1} dz}{(1 + z)(z^N - 1) H_2(1 - \lambda, z)}, \tag{14}$$

$$I_{N,\lambda}^{(2)} := \frac{N}{2\pi i} \oint_{C_1 - C_2} \frac{(1 - z) z^N dz}{(1 + z)(z^N - 1) H_2(1 - \lambda, z)}.$$

C_1 bzw. C_2 bezeichnen Kreise vom Radius ρ^{-1} bzw. ρ um den Nullpunkt und die reelle Zahl ρ mit $0 < \rho < 1$ ist so gewählt, daß die Nullstellen

$$z_1 = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda - 1 + \sqrt{1 + 4\lambda - 4\lambda^2}}{2(1 - \lambda)^2} \text{ bzw. } z_2 = \frac{(1 - \lambda)^2}{\lambda^2} z_1 \tag{15}$$

von $H_2(\lambda, z)$ bzw. $H_2(1 - \lambda, z)$ im Innern von C_2 und die übrigen Nullstellen dieser Funktionen außerhalb von C_1 liegen.

Dann gilt nach dem Residuensatz

$$s_{N,\lambda}^{(1)} = I_{N,\lambda}^{(1)} - \frac{N}{2\lambda(1 - \lambda)}, \quad s_{N,\lambda}^{(2)} = I_{N,\lambda}^{(2)} + \frac{N}{4\lambda(1 - \lambda)}. \tag{16}$$

Die Substitution $z \rightarrow 1/z$ führt in bekannter Weise (vgl. [4]) auf

$$I_{N,\lambda}^{(1)} = \frac{N}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{(1 - z)^2 dz}{(1 + z)(1 - z^N) H_2(\lambda, z)} + \frac{N}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{(1 - z)^2 z^{N-1} dz}{(1 + z)(1 - z^N) H_2(1 - \lambda, z)}$$

und hieraus folgt

$$t_{N,\lambda}^{(1)} = \frac{N}{2\lambda(1-\lambda)} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}} \right] \left[\frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{1-z_1^N} + \frac{1}{\lambda} \frac{z_2^{N-1}}{1-z_2^N} \right]. \quad (17)$$

Ebenso erhält man

$$t_{N,\lambda}^{(2)} = \frac{N}{4\lambda(1-\lambda)} \left\{ \left[\frac{1-2\lambda}{\sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}} - 1 \right] \frac{1}{1-z_1^N} + \left[\frac{1-2\lambda}{\sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}} + 1 \right] \frac{z_2^N}{1-z_2^N} \right\}. \quad (18)$$

Damit kann $t_{N,\lambda} = -s_{N,\lambda}^{(2)}/s_{N,\lambda}^{(1)}$ vermöge (16), (17) und (18) berechnet werden.

Für $N = 3$ ergibt sich

$$t_{3,\lambda} = \frac{1-2\lambda}{2-3\lambda^2}$$

und für $N \rightarrow \infty$ wird

$$T_\lambda := \lim_{N \rightarrow \infty} t_{N,\lambda} = \frac{1-(1-2\lambda)(1-\lambda)}{2(1-\lambda)\sqrt{1+4\lambda-4\lambda^2}}. \quad (19)$$

Eine etwas mühsame Rechnung ergibt ferner für jedes feste $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ die Gültigkeit der Monotonieaussage

$$t_{3,\lambda} < t_{5,\lambda} < t_{7,\lambda} < \dots < T_\lambda. \quad (20)$$

Tabelle 1 zeigt die Abhängigkeit von $t_{N,\lambda}$ von N und λ . Die Abbildungen 1 und 2 veranschaulichen diese Ergebnisse anhand der Graphen von $\tilde{S}(t)$.

TABELLE I

λ	$t_{3,\lambda}$	$t_{5,\lambda}$	$t_{7,\lambda}$	T_λ
0	0.50000000	0.50000000	0.50000000	0.50000000
0.1	0.40609137	0.40706301	0.40733432	0.40752520
0.2	0.31914894	0.32195594	0.32247792	0.32263484
0.3	0.23121387	0.23551498	0.23599628	0.23606373
0.4	0.13157894	0.13603501	0.13634259	0.13636364
0.5	0	0	0	0

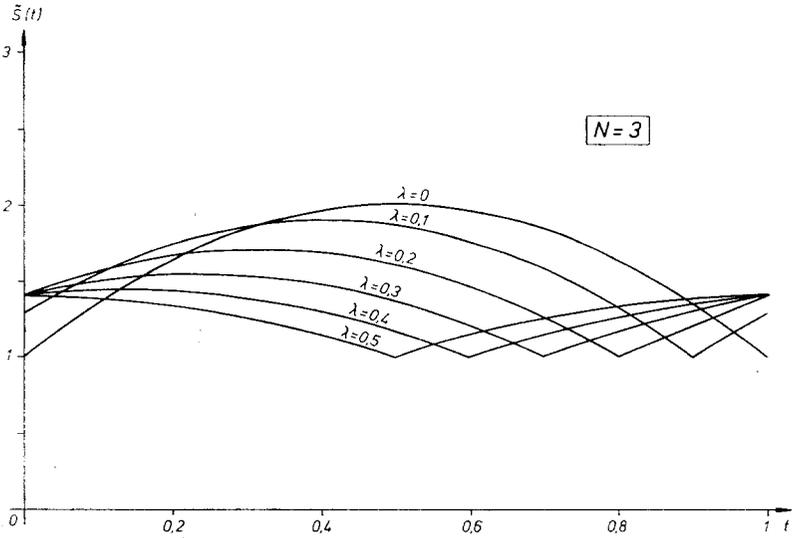


ABB. 1. Zur Abhängigkeit von $t_{N,\lambda}$ von λ .

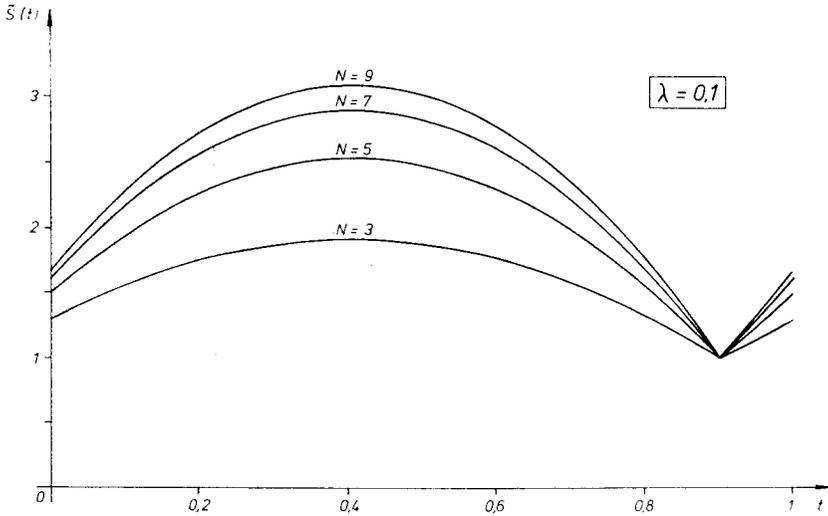


ABB. 2. Zur Abhängigkeit von $t_{N,\lambda}$ von N .

3.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zur Berechnung von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_\infty$. Aus (6) und (8) folgt zunächst für $\lambda = 0$ und $C_1 \cdots |z| = \rho^{-1}$, $C_2 \cdots |z| = \rho$, $0 < \rho < 1$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_{N,0}^2\|_\infty &= \frac{2}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{H_2(\frac{1}{2}, \zeta^\mu)}{(1 + \zeta^\mu) H_2(1, \zeta^\mu)} \\
&= \frac{1}{2N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{\zeta^{2\mu} + 6\zeta^\mu + 1}{(1 + \zeta^\mu)^2} \\
&= \frac{1}{4\pi i} \oint_{C_1-C_2} \frac{(z^2 + 6z + 1) z^{N-1} dz}{(1 + z)^2 (z^N - 1)} + \frac{N}{2} \\
&= \frac{1}{4\pi i} \oint_{C_2} \frac{1 + z^N}{1 - z^N} \frac{z^2 + 6z + 1}{z(1 + z)^2} dz + \frac{N}{2} = \frac{1}{2}(N + 1), \quad (21)
\end{aligned}$$

also insbesondere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}_{N,0}^2\|_\infty = \infty.$$

Für $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ gilt mit dem durch (10) bestimmten $t_{N,\lambda}$, den im Anschluß an (14) beschriebenen Integrationswegen C_1 und C_2 und den durch (15) gegebenen Zahlen z_1, z_2

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_\infty &= \frac{2}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \frac{H_2(t_{N,\lambda}; \zeta^\mu)}{(1 + \zeta^\mu) H_2(1 - \lambda, \zeta^\mu)} \\
&= \frac{1}{\pi i} \oint_{C_1-C_2} \frac{H_2(t_{N,\lambda}; z) z^{N-1} dz}{(1 + z)(z^N - 1) H_2(1 - \lambda, z)} + \frac{t_{N,\lambda}(1 - t_{N,\lambda})}{\lambda(1 - \lambda)} \\
&= 2 \left[\frac{H_2(1 - t_{N,\lambda}; z_1)}{(1 + z_1)(1 - z_1^N) \sqrt{1 + 4\lambda - 4\lambda^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{H_2(t_{N,\lambda}; z_2) z_2^{N-1}}{(1 + z_2)(1 - z_2^N) \sqrt{1 + 4\lambda - 4\lambda^2}} \right] + \frac{t_{N,\lambda}(1 - t_{N,\lambda})}{\lambda(1 - \lambda)}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt speziell für $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\|\mathcal{L}_{N,1/2}^2\|_\infty = \sqrt{2} \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2})^N}{1 + (3 - 2\sqrt{2})^N}.$$

Unter Verwendung von (19) wird ferner für $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_\lambda^2\|_\infty &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_\infty \\
&= \frac{2H_2(1 - T_\lambda; z_1)}{(1 + z_1) \sqrt{1 + 4\lambda - 4\lambda^2}} + \frac{T_\lambda(1 - T_\lambda)}{\lambda(1 - \lambda)}. \quad (23)
\end{aligned}$$

TABELLE II

λ	$\ \mathcal{L}_{3,\lambda}^2\ _\infty$	$\ \mathcal{L}_{15,\lambda}^2\ _\infty$	$\ \mathcal{L}_{29,\lambda}^2\ _\infty$	$\ \mathcal{L}_\lambda^2\ _\infty$
0	2.00000000	8.00000000	15.00000000	∞
0.0001	1.99999987	7.99997775	14.99983792	2500.75002499
0.001	1.99998652	7.99777971	14.98384245	250.75024876
0.01	1.99867510	7.78916398	13.59521599	25.75238288
0.1	1.89583949	3.24675792	3.26797690	3.26809684
0.2	1.70658219	2.03404255	2.03411664	2.03411665
0.3	1.54432751	1.64016060	1.64016098	1.64016098
0.4	1.43929899	1.46915584	1.46915584	1.46915584
0.5	1.40000000	1.41421356	1.41421356	1.41421356

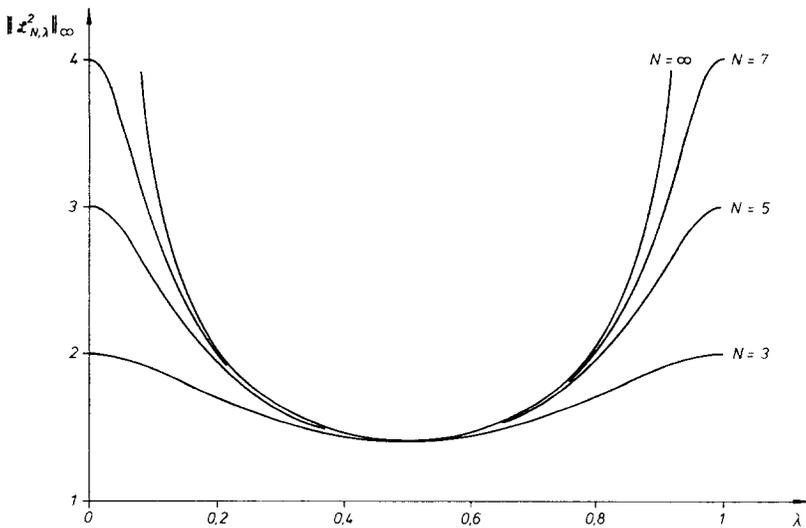


ABBILDUNG 3

In Tabelle II sind einige numerische Ergebnisse zusammengestellt. Den Verlauf von $\|\mathcal{L}_{N,\lambda}^2\|_\infty$ für $N = 3, 5, 7$ und ∞ zeigt Abb. 3.

Bemerkung. Meinardus und Taylor [3] haben kürzlich gezeigt, daß bei Interpolation in den Knoten ($\lambda = 0$) und ungeradem $N \geq 3$ die L_∞ -Norm des quadratischen Spline-Interpolationsoperators genau bei äquidistanter Knotenverteilung minimal wird (und den durch (21) gegebenen Wert annimmt). Es ist anzunehmen, daß eine entsprechende Aussage auch dann gilt, wenn bei beliebiger Knotenverteilung jeweils an den durch $\xi_\nu =$

$(1 - \lambda)x_{v+1} + \lambda x_v$, $0 \leq \lambda < 1$, gegebenen Stellen interpoliert wird. Im Fall $\lambda \neq 0$ besitzt die Norm wegen (23) dann sogar eine endliche obere Schranke für $N \rightarrow \infty$.

LITERATUR

1. E. W. CHENEY AND F. SCHURER, On interpolating cubic splines with equally spaced nodes, *Indag. Math.* **30** (1968), 517–524.
2. G. MEINARDUS UND G. MERZ, Zur periodischen Spline-Interpolation, in "Spline Funktionen. Vorträge und Aufsätze" (K. Böhmer, G. Meinardus, W. Schempp, Eds.), S. 177–195, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1974.
3. G. MEINARDUS AND G. D. TAYLOR, Periodic quadratic spline interpolant of minimal norm, *J. Approximation Theory* **23** (1978), 137–141.
4. G. MERZ, Interpolation mit periodischen Spline-Funktionen I, *J. Approximation Theory* **29** (1980), 11–19.
5. H. TER MORSCHÉ, On the existence and convergence of interpolating periodic spline functions of arbitrary degree, in "Spline-Funktionen. Vorträge und Aufsätze" (K. Böhmer, G. Meinardus, W. Schempp, Eds.), S. 197–214, Bibliographisches Institut Mannheim, 1974.
6. F. B. RICHARDS, Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator, *J. Approximation Theory* **7** (1973), 302–317.
7. F. SCHURER, A note on interpolating periodic quintic spline functions, in *Proc. Symp. Lancaster*, July 1969 (A. Talbot, Ed.), S. 71–81, Academic Press, London, 1970.